小平次元の加法公式について (特異点の位相幾何学)

AUTHOR(S):

中村, 郁

数理解析研究所講究録
170巻 1973年 88-93

小平次元の加法公式について

名大理　中村　郁

以下扱うのは　コンパクトな複素多様体です。コンパクトな複素多様体Xの小平次元(κ)は次の様に定義されます。Xの canonical line bundle K (Xを複素n次元とすれば　正則n型式の芽の層といってもよい) をとり　$P_m = \dim H^0(X, K^{\otimes m})$ とします　任意のmに対して　$P_m = 0$ ならば　$\kappa(X) = -\infty$,
あるm_0に対して　$P_{m_0} = 1$ で　任意のmに対して　$P_m \leq 1$ ならば　$\kappa(X) = 0$ とします。次に　$\exists m_0$に対して　$P_{m_0} \geq 2$ となる場合は

定理(飯高)　$\exists \kappa > 0$ (integer), $\exists \alpha, \beta > 0$, 十分大な m_1
s.t.　$\alpha m^{\kappa} \geq P_{mm_1} \geq \beta m^{\kappa}$　for $\forall m > 0$

によって　$\kappa(X) = \kappa$ とします。このκは幾何学的には次のような意味をもちます。$H^0(X, \mathcal{O}(K^{\otimes m})) = \{\varphi_0, \cdots, \varphi_N\}$ (基底) $N+1 = P_m$
基底を一つ定めるごとに　有理写像

$$\Phi_{mK} : X \longrightarrow \mathbb{P}^N_{\mathbb{C}} \quad (N\text{次元複素射影空間})$$

が定まります　即ち: $x \longmapsto (\varphi_{0j}(x), \cdots \varphi_{Nj}(x)) \in \mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$ が well-defined. このとき　$\kappa = \max_m \dim \Phi_{mK}(X)$ となります

このκに関しては 飯高さんの基本的結果がいくつかありますが 文献[1] を参照して頂くことにして ここでは省きます。P_mやκは2次元(複素)の場合 分類上非常に重要な役割を果たしてきました。(実際2次元の分類はP_mでなされるといってもよい位) 高次元の分類理論(に近い理論)を進めるにあたって 2次元までの結果を拡張してみようというのが基本的立場です ここでは 飯高さんの問題(それはしばしば否定的に解かれているが)で比較的肯定的に解かれた例を述べます. (X, F, Bはコンパクト複素多様体)

問題 Xを底をB, ファイバーをFとする解析的ファイバーバンドルとする そのとき $\kappa(X) = \kappa(B) + \kappa(F)$ か?

答は Fが代数多様体なら正しく 一般の場合には反例がある(反例は飯高さんによる)

詳しくは

I. Nakamura and K. Ueno An addition formula for Kodaira dimensions of algebraic fiber bundle (to appear in J. Math Soc. Japan).

を参照して下さい.

※V(コンパクト複素多様体)の双有理自己同型写像gは自然に $\underset{(同型写像)}{g^*}: H^0(V, \mathcal{O}(K_V^{\otimes m})) \longrightarrow H^0(V, \mathcal{O}(K_V^{\otimes m}))$ を引き起こします

即ち　各 m に対して　準同型写像

$$\rho_m : \mathrm{Bim}(V) \longrightarrow GL(H^0(V, \mathcal{O}(K_V^{\otimes m})))$$

が定義されます.

定理1　V を代数多様体とすれば　任意の m, $g \in \mathrm{Bim}V$ に対して　$\rho_m(g)$ は位数有限

ところで群論の結果

定理(Schur)　$GL(N, \mathbb{C})$ の部分群が　有限生成かつ任意の元が位数有限ならば　実はその部分群は有限群.

から

系　X を F をファイバーとするファイバーバンドル(底 B:コンパクト)とする.　G をこのファイバーバンドルの構造群(有限生成と仮定してよい)とする時　任意の m に対して　$\rho_m(G)$ は有限

この系により

定理2.　X, B, F を前の通りとすれば

$$\kappa(X) = \kappa(B) + \kappa(F)$$ が成り立つ.

が証明されます.

定理1の証明のために

補題1　$\rho_m(g)$ の固有値の絶対値は1　(V 代数的と仮定しないでよい)

補題2　$\rho_m(g)$ は対角化可能　(　〃　)

補題3　$\rho_m(g)$ の固有値は代数的整数　(　〃　)

補題4　X 代数的ならば　$\rho_m(g)$ の固有値は　1の巾根

$\pi: \tilde{V} \to V$ 正則かつ全射写像 ｝とがあって
$\tilde{V}$の双有理同型写像 $\tilde{g}$ ｝

$$\begin{cases} \tilde{g}^*\omega = \beta\omega, \quad \beta^m = \alpha \\ \omega^{\otimes m} = \varphi \end{cases}$$

とできる」を証明します。これより Vに対する $m=1$ の場合と同様にして β は(従って α も)代数的整数が導かれる. 詳しいことは省きますが, $\tilde{V}$としては canonical line bundle の全空間 K に φ の零点として定義される部分空間の非特異モデルをとり, $\tilde{g}$ は g により K に自然に引き起こされる変換(の制限)をとります.

補題4の証明) 補題1から補題3までは Vの代数的なことを全く用いていませんが ここでは用います. Vが $\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$ に埋蔵されている場合に証明すればよいことが知られています(Moisezonの定理)。証明には 整数論の良く知られた補題(定理?)
"α: 代数的整数とする. α の $\mathbb{Q}$ 上の任意の共役の絶対値が1ならば α は1のベキ根"
従って $\rho_m(g)$ の1つの固有値 α に対して その共役 α^σ に対して 適当に 代数多様体 V^σ とその双有理写像 g^σ 及び $H^0(V^\sigma, \mathcal{O}(K_{V^\sigma}^{\otimes m}))$ の元 φ^σ で $(g^\sigma)^*\varphi^\sigma = \alpha^\sigma\varphi^\sigma$ となるものの存在を示せば すでに示した補題1より $|\alpha^\sigma| = 1$ となって証明がおわります. そのために V の $\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$ での定義式を

$f_1 = \cdots = f_\ell = 0$, とします. f_i は多項式.

従って 補題2と補題4により $\rho_m(g)$ は有限位数が結論されます. また ここでは不要ですが 補題1と2を併せると $\mathrm{Bim}\,V$ の(単位元の)連結成分 $(\mathrm{Bim}\,V)^0$ に対して $\rho_m(\mathrm{Bim}(V)^0)=1$ となることもわかります

補題1の証明) $\varphi \in H^0(V\ \mathcal{O}(K_V^{\otimes m}))$ に対して ノルム $\|\ \|$ を次の様に定義する. $\varphi=\{\varphi_j (dz_j^1\wedge\cdots\wedge dz_j^n)^{\otimes m}\}$ とすると

$$\|\varphi\| = (\sqrt{-1})^{-n^2}\int_V |\varphi_j|^{\frac{2}{m}}\, dz_j^1\wedge\cdots\wedge dz_j^n\wedge d\bar{z}_j^1\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_j^n$$

明らかに $\|g^*\varphi\|=\|\varphi\|$. $\rho_m(g)$ の固有値の一つを α, α に対応する固有ベクトルを $\varphi(\neq 0)$ とすれば

$\|g^*\varphi\|=|\alpha|^{\frac{2}{m}}\|\varphi\|$, $\|\varphi\|>0$ 従って $|\alpha|=1$

補題2の証明) 上と同じノルムを用います. 今 $\rho_m(g)$ が対角化可能でないとすると $\varphi_1, \varphi_2 \in H^0(V\ \mathcal{O}(K_V^{\otimes m}))$ $\varphi_i\neq 0$ で $g^*\varphi_1=\alpha\varphi_1+\varphi_2$, $g^*\varphi_2=\alpha\varphi_2$ となるものが存在します. $\|\varphi_1\|=\|(g^l)^*\varphi_1\|$ |(任意の整数 l に対して)

$(g^l)^*\varphi_1=\alpha^l\varphi_1+l\alpha^{l-1}\varphi_2$.. 右辺は l を大きくすると無限大になる(矛盾)。

補題3の証明) $m=1$ の時 $H^0(V\ \mathcal{O}(K_V))\hookrightarrow H^n(V\ \mathbb{C})$ と見なせる. また $H^n(V\ \mathbb{C})=H^n(V\ \mathbb{Z})\otimes\mathbb{C}$ で g^* の固有値が代数的整数となることは明らか。$m>1$ に対しては $\rho_m(g)$ の固有ベクトル φ (固有値 α) に対して $\tilde{V}$ (コンパクト m次元複素多様体) と $\tilde{V}$ 上の正則 n 型式の

αをその共役α^σに移すような$\mathbb{Q}$上の体$\mathbb{Q}(\alpha)$ Galois closure の自己同型σの$\mathbb{C}$までの拡張を再びσで表わし $f_1^\sigma = \quad = f_l^\sigma = 0$ で定義される代数的集合を V^σとすれば 容易にg^σ, φ^σなどが構成されて 必要な条件を満たすことがわかります(証明終)

文献

[1] 飯高 茂　代数多様体の種数と分類　数学 24 (1972) 14-27